इकाई 10 दशमलव भिन्न

इकाई की रूपरेखा

10.1 परिचय

उद्देश्य

10.2 दशमलव भिन्न कठिन क्यों है?

10.3 दशमलव भिन्न में स्थानीय मान

10.4 जोड़ और घटाना

10.5 गुणा और भाग

10.6 दशमलव भिन्नों का अनुमान

10.4 सारांश

10.5 अभ्यासों पर टिप्पणियां

10.1 परिचय

पिछली इकाई में हमने सीखने–सिखाने का अध्ययन किया। हमने मुख्य रूप से सूत्रविधियों पर ज़ोर दिया था और यह कहा था भिन्नों सम्बंधित सूत्रविधियों के सीखने–सिखाने को मशीनी की बजाय अवधारणात्मक रूप से सार्थक बनाया जाना चाहिए। ऐसा होने पर इन विधियों का उपयोग भी कारगर ढंग से हो पाएगा। इस इकाई में हम दशमलव भिन्नों पर ध्यान देंगे। दशमलव भिन्न स्थानीय मान की संकेत पद्धति को इस तरह विस्तार देता है कि एक से छोटी संख्याओं को प्रदर्शित करना संभव हो जाता है। दशमलव भिन्न के उपयोग से जोड़, घटाना, गुणा और भाग की सूत्रविधियों की उपयोगिता बहुत बढ़ जाती है और इन्हें संख्याओं के कहीं व्यापक समूह पर लागू किया जा सकता है।

पूर्णांक संख्याओं और उनसे सम्बंधित सूत्रविधियों के ज्ञान को दशमवल भिन्नों पर लागू करना कोई मामूली बात नहीं है। बच्चों को पूर्णांक संख्याओं के गणित से दशमवल गणित में कदम रखने में कठिनाई होती है। कठिनाई मुख्य रूप से दशमलव भिन्नों के संकेत पद्धति को समझने और एक से छोटी संख्याओं की स्थानीय मान संरचना को समझने में होती है। इस इकाई में हम दशमलव भिन्न समझने में बच्चों को आने वाली दिक्कतों की चर्चा करेंगे और दशमलव भिन्न प्रस्तुत करने के कुछ ऐसे तरीके सुझाएंगे जिनसे बच्चों को दशमलव संख्याओं पर पकड़ बनाने में सुविधा हो। खण्ड 10.2 में हमने इन पहलुओं की चर्चा की है।

दशमलव भिन्नों की विभिन्न क्रियाओं की सूत्रविधियों से पहले हम कोशिश करेंगे कि दशमलव भिन्न में स्थानीय मान की अवधारणा विकसित करने में आपकी मदद कर सकें। खण्ड 10.3 में इसे प्रस्तुत किया गया है।

खण्ड 10.4 और 10.5 में हम दशमलव संख्याओं की चार बुनियादी क्रियाओं से जुड़ी समस्याओं की चर्चा करेंगे। यहां हमने सूत्रविधियों से जुड़े मुद्दों पर विचार करने के महत्व पर ज़ोर दिया है। मसलन हो सकता है कि पाठ्यपुस्तक में कोई विधि एक खास तरह से दी जाती है और कक्षा में उसी तरह से या अलग तरह से की जाती है। हम यह उभारने का प्रयास करेंगे कि इसमें से कितना बच्ची समझ पाती है और कितनी हद तक इसके साथ सहज हो पाती है। हमारा मकसद यह है कि बच्चों साथ काम करते हुए आप लगातार इस

बारे में सोचें। हमारा लक्ष्य यह भी है कि आप सूत्रविधियों में निहित तर्क के बारे में सोचें और सम्भव हो, तो नई विधियां विकसित करें। और हम उम्मीद करते हैं कि आपकी यह मानसिक सक्रियता आपके छात्रों के सोच का भी अंग बन जाएगी।

और अन्तिम खण्ड 10.6 में हम चर्चा करेंगे कि बच्चों में दशमलव भिन्नों का अनुमान लगाने व सन्निकटन में कुशलता को कैसे विकसित किया जाए।

नोट : इकाई में दशमलव भिन्न शब्द का उपयोग दशमलव रूप में लिख ऐसी किसी भी संख्या के लिए किया गया है जिसमें शून्येतर आंशिक भाग हो। लोग ऐसी संख्याओं को दशमलव/दशमलव संख्याएं कह देते हैं। किन्तु याद रखने की बात यह है कि यह ग़लत है। दाशमिक प्रणाली (यानी दस के आधार पर) लिखी कोई भी संख्या दशमलव संख्या है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आपः

- दशमलव पद्धति की बच्चों की समझ का आकलन कर सकेंगे;
- इकाई, दसवें भाग और सौवें भाग के संदर्भ में अपनी शिक्षण रणनीति का मूल्यांकन कर सकेंगे;
- इस बात की जांच कर पाएंगे कि विभिन्न क्रियाओं की सूत्रविधि बच्चों तक कैसे पहुंच रही है;
- बच्चों में यह क्षमता विकसित करने के तरीके खोज पाएंगे कि वे दशमलव भिन्नों की विभिन्न क्रियाओं के परिणामों का अनुमान कर सकें।

10.2 दशमलव भिन्न कठिन क्यों है?

पड़ोस के एक विद्यालय के कक्षा 5 के बच्चों को दशमलव की चार बुनियादी क्रियाएं सिखाई गई थीं। इस पर आधारित परीक्षण में उनका प्रदर्शन भी अच्छा ही रहा था। एक वर्ष बाद कक्षा 6 में उन्हें निम्नलिखित सवाल दिए गए :

i) 0.25, 0.3, 0.233 और 0.1678 में से सबसे बड़ी संख्या बताओ।

ii) 8.6 में 2.78 घटाओ।

iii) $30.5 \div 10$

कई बच्चों ने (i), (ii) व (iii) के उत्तर क्रमशः 0.1678, 6.18 और 35 दिए।

बाद में इन बच्चों से पूछा गया कि ये उत्तर उन्होंने कैसे निकाले? उनके उत्तर निम्नलिखित थे।

0.1678 उत्तर देने वाली एक बच्ची ने हमें बताया, "जिस संख्या में जितने ज़्यादा अंक होते हैं वह उतनी ही बड़ी होती है। इसलिए 0.1678 है।"

एक अन्य बच्ची ने हमें बताया कि उसने प्रश्न (ii) इस तरह किया:

$$\begin{array}{r} 8.6- \\ \underline{2.78} \\ 6.18 \end{array}$$

जब उससे अपना तरीका समझाने को कहा गया तो उसने बताया :

पहली संख्या के आखिरी स्थान पर कोई अंक नहीं है, इसलिए मैंने 8 लिखा, फिर $7-6=1$ और $8-2=6$.

तीसरे प्रश्न के बारे में एक बच्ची ने बताया कि 10 का भाग देने के लिए हम दशमलव बिन्दु को दाई ओर खिसकाते हैं। इसलिए उत्तर 35 आएगा।

इनमें से किसी बच्ची को यह आभास तक न था कि उनके उत्तर कितने गलत हैं क्योंकि उन्हें यह पता नहीं कि दशमलव संख्या होती क्या है? बाद में हमने यह पता करने का प्रयास किया कि उनकी कक्षा शिक्षक दशमलव क्रियाएं सिखाने के लिए क्या रणनीति अपनाती हैं। हमने पाया कि वे तरीका यह अपनाती हैं कि कुछ उदाहरणों के ज़रिए बच्चों को मानक सूत्रविधि बता दें। इसके बाद वे उनसे इस पर आधारित कई सवाल करवाती हैं।

? स्पष्ट है कि उनकी कक्षा के बच्चों को दशमलव भिन्नों में कठिनाई है। उनकी रणनीति बच्चों के सीखने में मददगार क्यों नहीं हो पा रही है?

आइए पहले प्रश्न के उत्तर पर विचार करें। बच्ची ने सोचा कि "जितने ज़्यादा अंक उतनी बड़ी संख्या।" क्या आपको कोई कारण नज़र आता है कि क्यों कई बच्चे इस तरह का उत्तर देते हैं। उनकी अवधारणात्मक समझ क्या है जिस वजह से उन्होंने ग़लती की?

जब यह सवाल कुछ शिक्षकों के सामने रखा गया तो उनके उत्तर अलग–अलग थे। यहां हम कुछ मत प्रस्तुत कर रहे हैं।

मत I : कक्षा 3 तक आते–आते अधिकांश बच्चे यह नियम सीख लेते हैं कि मात्र अंकों की संख्या देखकर सबसे बड़ी संख्या कैसे पहचानी जाती है। वे ज़्यादा अंकों वाली संख्या देखते ही उसे सबसे बड़ी संख्या कह देते हैं। यह नियम सीधा–सादा और सरल है तथा पूर्णांक संख्याओं पर हमेशा सही बैठता है। इसी नियम को जब दशमलव बिन्दु की परवाह किए बगैर दशमलव संख्याओं पर लागू किया जाता है, तो समस्या पैदा हो जाती है।

मत II : एक दशमलव संख्या के दो भाग होते हैं–पूर्णांक संख्याओं की एक श्रृंखला दशमलव बिन्दु के बाई ओर तथा संख्याओं की दूसरी श्रंखला दाई ओर। प्रायः इन दो भागों का अन्तर छात्रों को स्पष्ट नहीं होता और वे दोनों भागों को पूर्णांक संख्याएं मान बैठते हैं। कुछ बच्चे, मसलन संख्या 13.6 को इस रूप में लेते हैं कि 13 और शेष 6।

मत III : कुछ शिक्षक बताते हैं कि बच्चे कभी–कभी यह सोचते हैं कि दशमलव संख्याओं का नियम पूर्णांक संख्याओं से उल्टा होता है। तब वे किसी छोटी (लम्बाई में छोटी) दशमलव संख्या को लम्बी संख्या से बड़ा मान लेते हैं, जैसे $0.3 > 0.539$ मान लेते हैं। इसका कारण यह सामान्यीकरण है कि जब आप दशमलव बिन्दु से दाई ओर आगे बढ़ते हैं तो संख्या छोटी होती जाती है, जैसे बाई ओर बढ़ने पर संख्या बढ़ती जाती है।

मत IV : कुछ शिक्षकों ने बताया कि कभी–कभी बच्चे सोचते हैं कि दशमलव संख्या 0 से छोटी संख्या दर्शाती है। यह तब होता है जब बच्चों का परिचय ऋणात्मक संख्याओं से भी हो जाता है। जैसे कक्षा 6 व 7 के बच्चों के मामले में। उदाहरण के लिए, यदि उनसे कहा जाए कि संख्या रेखा पर 0.36 दर्शाओं तो वे इसे शून्य के बाईं ओर रख देते हैं।

शिक्षकों द्वारा बताए गए इन सभी कारणों से यही बात झलकती है कि बच्चे विभिन्न नियमों व प्रक्रियाओं के बीच भ्रम में रहते हैं। अक्सर उन्हें नियम और छोटे रास्ते बता दिए जाते

हैं या ऐसी अपर्याप्त परिभाषाएं बता दी जाती हैं जो उन्हें यह मौका ही नहीं देती कि वे स्वयं उस अवधारणा को टटोल सकें और विकसित कर सकें। ये ग़लतियां बच्चों के आम भ्रमों को भी प्रतिबिम्बित करती हैं। जब हम बच्चों के कार्य व उत्तरों को देखते हैं, तो हमें बहुत कुछ पता चलता है कि उनके दिमाग़ों में क्या चल रहा है, उनका अवधारणात्मक ढांचा क्या है, उनके भ्रम व स्पष्टताएं क्या हैं? इसी से हमें यह समझने में मदद मिलती है कि कक्षा में बच्चों के साथ क्या किया जाना चाहिए?

E1) कक्षा V के बच्चों के लिए दशमलव भिन्नों की अवधारणात्मक समझ से सम्बंधित कुछ प्रश्न बनाइए। उनसे कहिए कि इन पर अलग–अलग अकेले काम करें। उनके उत्तर पत्र एकत्र कर लीजिए।

क) जिन बच्चों ने ग़लतियां की हैं, उनके उत्तरों को ध्यान से देखिए। क्या आपको इन ग़लतियों में कोई क्रम दिखता है ?

ख) बच्चों से बात करके यह समझिए कि किसी विधि को उपयोग करने का उनका तर्क क्या है? यह भी पता करने का प्रयास कीजिए कि क्या कई ग़लतियां इसलिए हुई हैं कि उन्हें स्थानीय मान की अपनी समझ पर विश्वास नहीं है।

हमने अब तक जो कुछ कहा उसका सार यह है कि यदि बगैर समझे नियम और विधियां लागू की जाएं तो अन्ततः भ्रम पैदा होते हैं। इसलिए हमें यह सोचना होगा कि बच्चों को दशमलव की सूत्रविधियां समझने में मदद कैसे करें।

मोटे तौर पर, दशमलव की सूत्रविधियां सीखने के लिए स्थानीय मान पद्धति की समझ, सम्बंधित क्रिया की समझ और अनुमान का एहसास होना ज़रूरी है। अगले खण्डों में हम एक–एक करके इन पहलुओं से सम्बंधित मुद्दों की चर्चा करेंगे।

10.3 दशमलव भिन्न में स्थानीय मान

आपने बच्चों को दाशमिक प्रस्तुतिकरण कई बार पढ़ाया भी होगा। यदि आप अपने द्वारा उपयोगी की गई रणनीति को फिर से देखें, तो उसका सबसे महत्वपूर्ण पहलू क्या लगता है ? दशमलव भिन्न के लिए यह जानना बहुत आवश्यक है कि हम एक के भागों की बात कर रहे हैं। आप शायद मानते हों कि बच्चे में संख्याओं की तुलना करने की क्षमता भी इतनी ही महत्वपूर्ण है। छात्रों के साथ गतिविधि हेतु स्वयं को व्यवस्थित करने के निए निम्नलिखित अभ्यास कीजिए।

E2) दशमलव पद्धति से परिचित कराने से पहले किसी बच्चे के पास क्या–क्या पूर्व ज्ञान होना चाहिए ?

E3) संक्षेप में बताइए कि आप अपनी कक्षा में दशमलव पद्धति का प्रस्तुतिकरण कैसे करेंगे?

E4) "तुम संख्याओं को दशमलव पद्धति में क्यों लिखते हो ?" यह प्रश्न कुछ ऐसे बच्चों से पूछिए जिन्हें दशमलव पद्धति से परिचय कराया जा चुका है। उनके उत्तर एकत्र कीजिए। इनसे आपको क्या पता चलता है ?

इतना तो स्पष्ट है कि जो सबसे महत्वपूर्ण बातें बच्चों को पता होनी चाहिए, स्थानीय मान उनमें से एक है। दशमलव भिन्नों का उपयोग करते हुए स्थानीय मान की समझ पुष्ट होती है मगर यह ज़रूरी है कि पहले से स्थानीय मान के उपयोग में दक्षता हो। बच्ची स्थानीय मान का ठीक–ठीक उपयोग तभी कर पाएगी जब उसके पास पूर्णांक संख्याओं के संदर्भ में स्थानीय मान की मज़बूत आधार मौजूद हो। इस आधार पर उसे दशमलव पद्धति समझने में मदद मिलती है। इसलिए हमें बच्चों को ऐसे कार्य देने चाहिए। जिनमें हमें स्थानीय मान में उनकी दक्षता को समझने में मदद मिले और उन्हें अपने दिमाग़ पर ज़ोर डालने व अवधारणा को समझने का मौका मिले। जैसेः आप 10-11 वर्षीय बच्चों को स्थानीय मान की समझ से सम्बंधित कार्य दे सकते हैं। उन्हें पहले ध्यान दिला दीजिए कि 16 में '1' का मतलब 10 है। फिर उनसे पूछिए कि निम्नलिखित संख्याओं में 1 का क्या अर्थ है : 301, 2103, 2.1, 2.31 वगैरह।

आपकी क्या अपेक्षा है कि उत्तर क्या होंगे ? यदि आपको पक्का नहीं है तो कुछ बच्चों के साथ करके देख सकते हैं। उनके उत्तरों ने आपको हैरान कर दिया ? ऐसा नहीं है कि इन बच्चों ने प्रयास नहीं किया या उन्हें पर्याप्त अभ्यास नहीं है। अन्य बच्चों की तरह इन बच्चों का सम्पर्क भी पूर्णांक संख्याओं के स्थानीय मानकी अवधारणा से हुआ होगा। किन्तु एक बार सम्पर्क हो जाने से और एक समय पर इसे कर पाने से यह गारन्टी नहीं होती कि वे इसे फिर से कर ही पाएंगे। इसलिए यह ज़रूरी है कि इस मुकाम पर एक बार फिर इस अवधारणा को दोहरा लिया जाए। यह भी ज़रूरी है कि हम प्रत्येक चरण पर उन्हें यह बताएं कि कैसे यह पद्धति दशमलव भिन्नों की विभिन्न क्रियाओं से सम्बंधित है। उदाहरण के तौर पर यह देखिए कि दो दशमलव भिन्नों का गुणा कैसे किया जाता है।

1.2 और 0.57 का गुणा करने के लिए हम दशमलव को अनदेखा करके 12 और 57 का गुणा कर लेते हैं। बाद में गुणनफल में फिर से दशमलव लगाया जाता है। इसके लिए हम दोनों संख्याओं में दशमलव के बाद के अंक गिन लेते हैं और गुणनफल में उसी हिसाब से दशमलव लगा देते हैं। ($12 \times 57 = 684$; 1.2 में दशमलव के बाद एक अंक है और 0.57 में 2 अंक है – कुल तीन; गुणनफल में दशमलव में इस तरह लगाना है कि दशमलव के बाद तीन अंक रहें – उत्तर 0.684)।

ध्यान दें कि यह नियम केवल सही उत्तर पाने में मदद करता है। यदि हम इस नियम को दशमलव में स्थानीय मान पद्धति से जोड़कर न देखें, तो इसका कोई अर्थ नहीं है। इसलिए नियम बताते समय हमारी कोशिश यह होनी चाहिए कि बच्ची नियम और अवधारणा का सम्बंध देख पाए। इस तरह से वह इसके तर्क पर पकड़ बना पाएगी।

एक और कारण, जिसकी वजह से बच्चों को दशमलव पद्धति के सवालों में मुश्किल आती है, वे इन संख्याओं के नामों से सम्बंधित है। उन्हें ऐसी संख्याएं बहुत भ्रमित करती हैं जिनके नाम तो एक–से हैं किन्तु मूल्य अलग–अलग हैं।

चूँकि सैकड़ा के उपयोग का बहुत अभ्यास नहीं होता और सौ गुना व सौवां भाग के बीच का अन्तर ठीक से समझा नहीं गया है, इसलिए बच्चे हमेशा तय नहीं कर पाते कि कब कौन सा शब्द सही है।

हमने देखा कि बच्चे दशमलव भिन्नों की क्रियाएं करते समय दशमलव तथा पूर्णांक संख्याओं के लिए निरूपित नियमों के उपयोग के प्रति आश्वस्त नहीं होते। .09 और .1 में कौन सी संख्या बड़ी है जैसे सवाल का आप उत्तर होता है कि .09 बड़ी है। इसी प्रकार, अगर दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले अंकों के संख्या बराबर न हो तो, तब उन संख्याओं

पर काम करते हुए इस नियम के विचित्र उपयोग देखने में आते हैं कि दशमलव बिन्दु के बाद '0' का कोई अर्थ नहीं है जैसे : 0.1 और .10 बराबर हैं और कभी–कभी तो यह भी कह दिया जाता है कि .01 भी इनके बराबर है या .39 और .309 को भी इस आधार पर बराबर बता दिया जाता है।

E5) बच्चों को दशमलव भिन्न पढ़ाते समय आपने किस तरह की दिक्कतों का सामना किया है ? दो उदाहरण दीजिए।

यदि हम दशमलव भिन्नों पर किए गए अध्ययनों का विश्लेषण करें और दशमलव भिन्नों का उपयोग करने वाले वयस्को के बारे में भी कुछ जानकारी इकट्ठी करें, तो हम यह समझ पाएंगे कि कई बच्चे दशमलव को लेकर बहुत भ्रमित हैं। ऐसा नहीं है कि वे रोज़मर्रा के जीवन में रुपए–पैसे, मीटर–से.मी. या किलोग्राम–ग्राम का हिसाब नहीं कर पाते। वे तो लीटर और मिलीलीटर से भी निपट लेते हैं मगर दशमलव के साथ कई बार कठिनाई महसूस करते हैं। कई बार तो ये भ्रम वही होते हैं जो पूर्णांक संख्याओं के साथ भी होते हैं। किन्तु यहां हम उन भ्रमों की बात कर रहे हैं जो दशमलव बिन्दु के प्रवेश के साथ उत्पन्न होते हैं। चूँकि यह आवश्यक है कि बच्चे किसी संख्या की मात्रा का अनुमान विकसित करे और उसके लिए उपयुक्त संकेत पद्धति भी अर्जित करे, इसलिए ऐसी रणनीतियां विकसित करनी होंगी जो बच्चों को ऐसे अवसर प्रदान करें। कैसे करें ?

दशमलव भिन्नें पहले दसवां भाग और फिर सौवां भाग होती हैं। स्पष्ट है कि ये बहुत छोटी हैं। किसी चीज़ को पहले दस और फिर सौ बराबर भागों में बांटना आसान नहीं है। यद्यपि, हम चौखाने कागज़ और ग्राफ कागज़ की पट्टियों का उपयोग दसवां भाग दर्शाने के लिए कर सकते है।

E6) आप अपने बच्चों को दशमलव के पहले स्थान यानी केवल दसवें भाग वाली दशमलव भिन्नों का अनुभव प्राप्त करने से कैसे मदद करेंगे ? ध्यान रखें इन भिन्नों में सौंवा भाग नहीं है।

दो दशमलव स्थानों वाली संख्याओं को संभालने का विषय और कठिन है। कई बच्चे एक स्थान वाली दशमलव भिन्नों के साथ काम कर लेते हैं किन्तु यदि दशमलव के बाद एक से अधिक अंक हों तो उन्हें कठिनाई आने लगती है। पूर्णांक संख्या प्रणाली के नियमों को दशमलव के बाद के अंकों पर लागू करने सम्बंधी भ्रम उभरने लगते हैं। दशमलव के बाद एक अंक तक तो यह प्रणाली सरल है मगर दशमलव के बाद दो अंक रखते ही भ्रम प्रारम्भ हो जाता है।

E7) आप उपर्युक्त विचार से सहमत हैं या नहीं? अपने उत्तर के कारण भी बताइए।

हालांकि उपर्युक्त चर्चा से लगता है कि हमें प्राथमिक स्तर के बच्चों को दशमलव के दो स्थान वाली संख्याएं समझने को विवश नहीं करना चाहिए किन्तु कुछ अन्य अध्ययनों के नतीजे इससे अलग हैं। यह सही है कि कई बच्चे स्थानीय मान का सामान्यीकरण कर पाते हैं और इसका उपयोग दशमलव भिन्नों के लिए भी दक्षतापूर्वक कर लेते हैं। वे यह सिद्धान्त अमूर्त स्तर पर समझ पाते हैं। कुछ अन्य बच्चे ऐसे भी होते हैं जिन्होंने अभी यह सिद्धांत अमूर्त रूप में नहीं पकड़ा है। ये बच्चे अभी परिवर्तन की अवस्था में हैं। एक प्राथमिक विद्यालय के बच्चों पर किए गए एक अध्ययन का निष्कर्ष है कि 52 में 39 बच्चे, बगैर किसी मदद के, यह बता पाए कि 2.61 में '1' का अर्थ क्या है। इस मामले में ग़ौरतलब बात यह

है कि इस विद्यालय में बच्चों का सौवें भाग से परिचय तभी करवाया गया जब दसवें भाग का काफी अनुभव वे कर चुके थे। इस सबका अर्थ यही है कि बच्चों को दशमलव पद्धति के साथ काफी समय दिया जाना चाहिए। उन्हें पहले ऐसी दशमलव भिन्नों के साथ काफ़ी समय मिलना चाहिए जिनमें सिर्फ दसवां भाग हो। इसके बाद ही सौवें और हज़ारवें भाग की बात की जानी चाहिए।

बच्चों को दशमलव के दूसरे स्थान वाली भिन्नों के साथ आत्मविश्वास अर्जित करने के लिए क्या किया जाए? सौवे भाग की कल्पना करने में उनकी मदद कैसे की जाए? मेरी एक मित्र कक्षा 5 की शिक्षक है। उसने निम्नलिखित विधि का प्रयोग किया और इसे काफ़ी प्रभावी पाया।

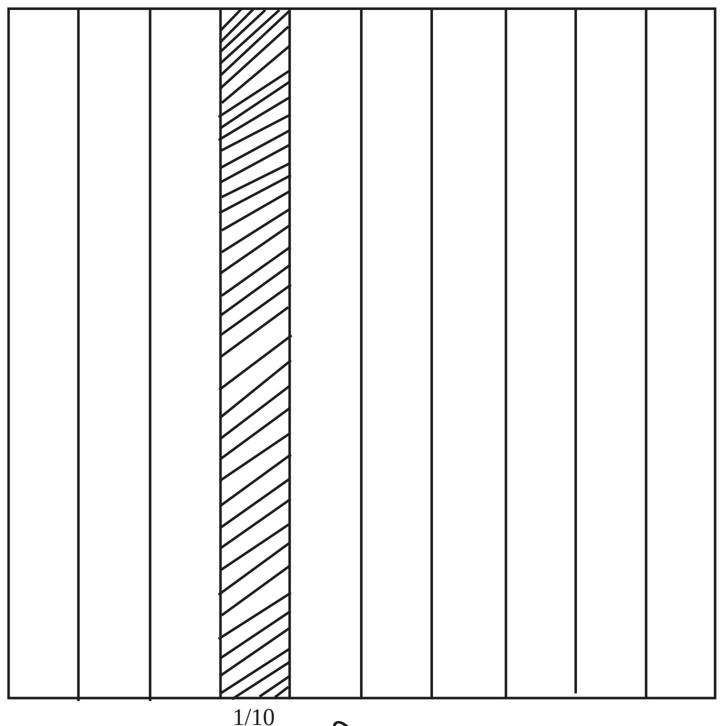
आइए देखें कि वह अपने बच्चों को दो दशमलव स्थान तक दशमलव पद्धति समझने मदद कैसे करती है।

उदाहरण 1 : कक्षा में 30 बच्चे थे। उसने सबको एक–एक ग्राफ कागज़ बांट दिया। अब उसने बच्चों से कहा कि वे इस पर 10×10 से.मी. का वर्ग बनाएं, जैसा कि चित्र 1 में दर्शाया गया है। उसने बच्चों को समझाया कि वर्ग कैसे बनाएं। इसे उसने इकाई वर्ग का नाम दिया।

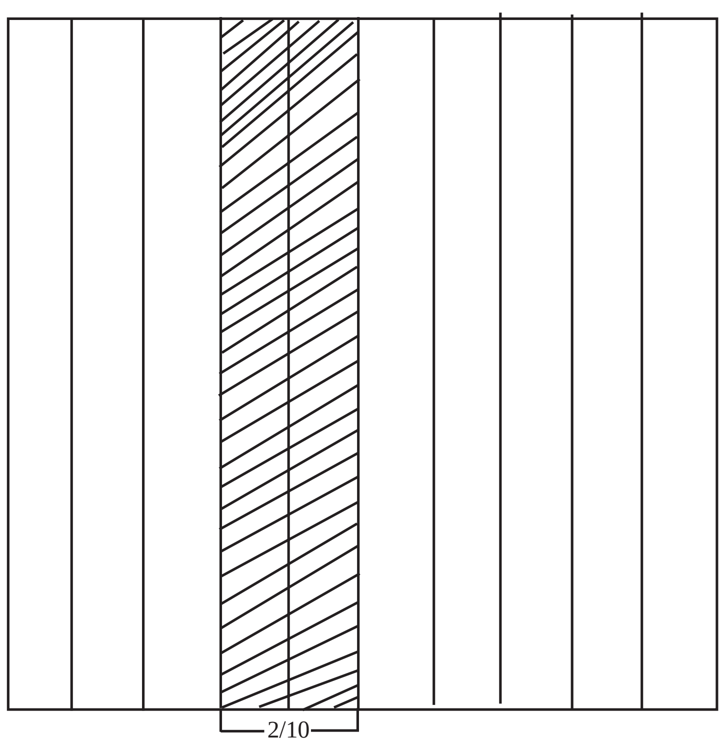
चित्र 1: एक इकाई वर्ग

अब उसने बच्चों से कहा कि वे इस वर्ग को 10 बराबर पट्टियों में यानी पतले–लम्बे आयतों में बांट लें (देखे चित्र 2)। फिर उसने बच्चों से पूछा कि एक पट्टी वर्ग का कितना भाग है। कुछ बच्चे बता पाए कि पट्टी का $\frac{1}{10}$ भाग है। उसने छात्रों से पूछा कि वे $\frac{1}{10}$ को दशमलव पद्धति में कैसे लिखेंगे। बच्चों ने कहा 0.11 तो उसने बच्चों को समझाया कि प्रत्येक पट्टी 0.1 को दर्शाता है। इस तरह से उसने बच्चों को $0.1 = \frac{1}{10}$ की एक प्रत्यक्ष छवि देखने में मदद दी। इसके बाद वह निम्नानुसार आगे बढ़ी :

शिक्षक : चलो देखते हैं कि कितना भाग 0.2 के बराबर होगा। $0.2 = \frac{2}{10} = 2 \times \frac{1}{10}$ । यह दो लम्बी पट्टियों के बराबर है। सुविधा के लिए मैं दो पास–पास की पट्टियां ले रही हूँ (देखें चित्र 3)। इस प्रकार से उसने बच्चों को 2 दसवें भाग, 3 दसवें भाग आदि दर्शाने का काफ़ी अभ्यास करवाया। उसने यह भी बताया कि इन्हें 0.2, 0.3 आदि लिखते हैं। उसने उन्हें यह भी समझने में मदद दी कि वर्ग के $\frac{1}{10}$ का दस गुना पूरे इकाई वर्ग के बराबर होता है।



चित्र 2



चित्र 3: $\frac{1}{10}$ का दुगना $\frac{2}{10}$ होता है।

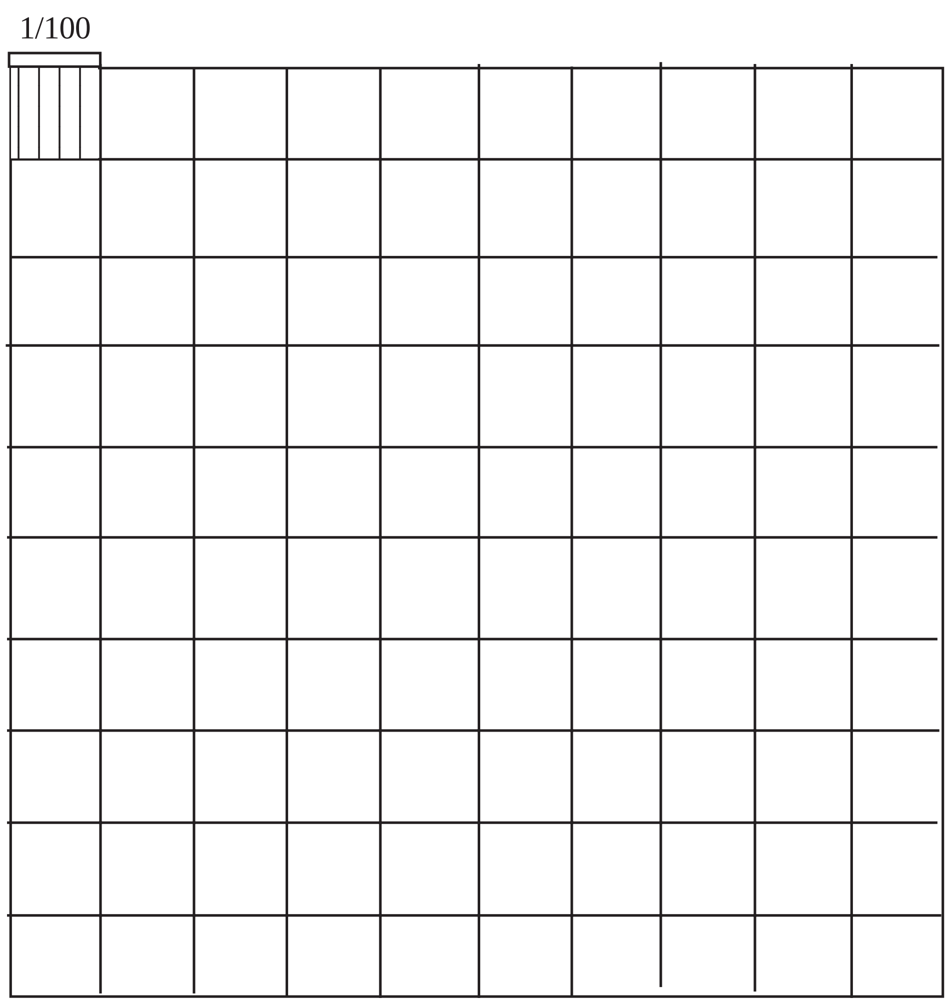
जब बच्चों ने वर्ग के दसवें भाग की आकृतियों को पहचान लिया, तो शिक्षक ने उन्हें बताया कि ये वर्ग के दसवें भाग हैं। अब उसने बच्चों से कहा कि वे वर्ग को और बांट। यह वर्ग खड़ी पट्टियों में बंटा हुआ है। अब इसे चित्र 3 में दिखाएं अनुसार 10 आड़ी पट्टियों में बांट लें।

अब उसने बच्चों से छोटे–छोटे वर्गों (1 से.मी. × 1 से.मी.) पर ध्यान देने को कहा और फिर पूछा,

शिक्षक : यह छोटा वर्ग इकाई वर्ग का कितना भाग है ?

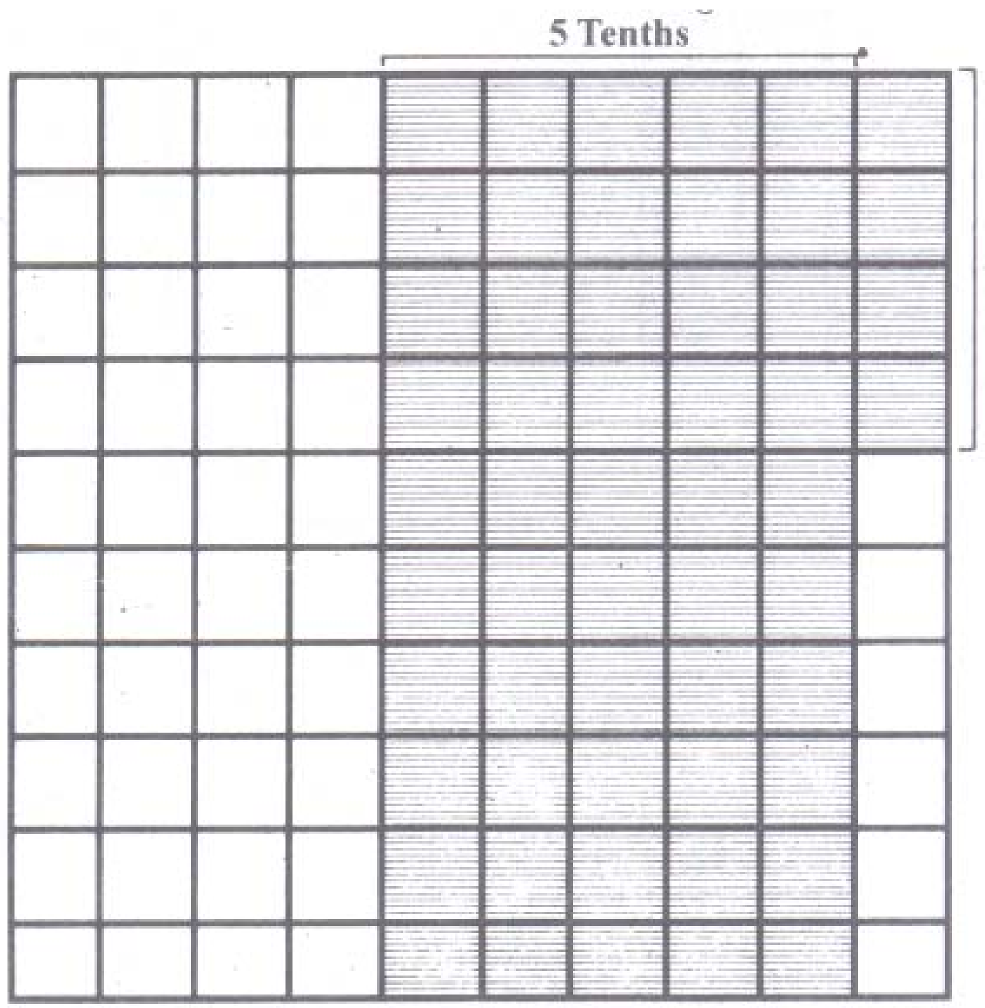
एक बच्ची रानी : सौवां भाग।

शिक्षक : बहुत बढ़िया। ध्यान दो कि इकाई वर्ग को 100 भागों में बांटा गया है और हम एक भाग की बात कर रहें हैं। इसलिए यह सौवां भाग यानी $\frac{1}{100}$ हुआ।



चित्र 4

जब बच्चे यह पहचान गए कि किन आकृतियों को वर्ग का दसवां और सौवां कहना है, तो उसने उनसे पूछा कि एक वर्ग के कितने सौवें भाग हैं। उसने यह भी पूछा कि कितने सौवें भाग मिलाने पर एक दसवां भाग बनता है। इसी प्रकार से 3 दसवें भाग आदि कैसे बनेंगे ? इसके बाद उसने बच्चों से कहा कि वे विभिन्न दसवें और सौवें भाग दर्शाने के लिए रंग का उपयोग करें। जैसे– उसने बच्चों से 54 सौवें भाग रंगने को कहा। बच्चों ने चित्र 5 में दिखाए अनुसार यह कर दिखाया।



चित्र 5

अब शिक्षक आगे बढ़ा।

शिक्षक : वर्ग के कितने दसवें भागों में रंग भरा है ?

बच्चे : (गिनकर) 5 दसवें भागों में।

शिक्षक : इसके अतिरिक्त कितने सौवें भागों में रंग भरा है ?

बच्चे : (गिनकर) 4 सौवें भागों में।

शिक्षक : यानी रंगीन भाग में 5 दसवें भाग हैं और 4 सौवें भाग है। हम इसे 0.54 लिखते हैं।

इसके बाद उसने बच्चों से इसी प्रकार के वर्ग के अलग–अलग भागें में रंग भरने तथा उनको दशमलव भिन्नों के रूप में लिखने को कहा। उसने अभ्यास में ऐसे भी उदाहरण दिए जिनमें रंग भरा वर्ग का भाग एक दसवें भाग से भी कम था, जैसे 0.06।

यह तो ऐसी भिन्नों की बात थी जिनमें इकाई शून्य थी। इसके बाद उसने बच्चों का परिचय ऐसी दशमलव भिन्नों से भी कराया जिनमें इकाई शून्य नहीं थी। यानी 2.54 जैसी संख्याएं। इनके लिए उसने एक अन्य गतिविधि का सहारा लिया।

वह ढेर सारे नकली 1 रुपए, 10 पैसे और 1 पैसे के सिक्के ले आई। उसने बच्चों को इस बात पर ध्यान देने को कहा कि 10 पैसे का सिक्का रुपए का दसवां भाग है और 1 पैसे का सिक्का रुपए का सौवां भाग है। बच्चों को इस गतिविधि से परिचित कराने के लिए उसने कक्षा को पांच टोलियों में बांट दिया और प्रत्येक टोली को 1 रुपए, 10 पैसे व 1 पैसे के कुछ सिक्के दे दिए। उनसे कहा कि वे इन्हें गिनकर निम्नलिखित तालिका में भरें। उनसे यह सावधानी बरती थी कि किसी भी टोली को 10 पैसे या 1 पैसे या 1 पैसे के 9 से अधिक सिक्के न मिलें।

	एक रुपए के सिक्के	10 पैसे के सिक्के	1 पैसे के सिक्के	मूल्य
टोली 1	2	3	5	रु. 2.35
टोली 2	3	6	0	रु. 3.60
टोली 3	1	0	0	रु. 1.00
टोली 4	0	0	6	रु. 0.06
टोली 5	4	1	0	रु. 4.10

इसके बाद उसने उनसे इन सिक्कों का मूल्य लिखने को कहा, जैसा कि तालिका के आखिरी कॉलम में बताया गया है। हर मामले में शिक्षक ने टोलियों को इस तरह के तथ्य की याद दिलाई कि 35 पैसे का अर्थ है एक रुपए के तीन दसवें भाग और 5 सौवें भाग। बार–बार यह बात याद दिलाकर उसने बच्चों को दशमलव भिन्नों में स्थानीय मान की बात को समझने में मदद दी।

————x————

और अब दो अभ्यास आपके लिए।

E8) आपके विचार में उपरोक्त उदाहरण में स्थानीय मान पद्धति समझाने के लिए शिक्षक ने पहले आकृतियों और उसके बाद पैसों का उपयोग क्यों किया होगा ?

E9) अपने आसपास के कुछ बच्चों के साथ उपरोक्त गतिविधियां आजमाइए। मूल्यांकन कीजिए कि क्या वास्तव में इनसे बच्चों की स्थानीय मान की समझ को बेहतर बनाने में मदद मिली।

अब हम दशमलव संख्याओं के साथ क्रियाओं की समस्याओं पर चर्चा करेंगे।

10.4 जोड़ और घटाना

दशमलव के साथ क्रियाएं करने की समस्या को समझने के लिए, पहले एक छोटे तरीके को देखते हैं।

एक दस वर्षीय बच्ची को 0.26 और 0.3 जोड़ने को कहा गया, तो उसने यह प्रश्न इस तरह किया :

$$\begin{array}{r} 0.26 \\ +0.03 \\ \hline 0.29 \end{array}$$

जब पूछा गया कि उसने 0.3 को 0.03 क्यों लिखा, तो उसने बताया कि उसकी कक्षा में शिक्षक ने ऐसा बताया था कि दो दशमलव भिन्नों को जोड़ते वक्त दोनों संख्याओं को एक जैसा बनाना चाहिए। यानी उनमें शून्य लगातर दोनों में दशमलव के बाद अंकों की संख्या बराबर कर लेनी चाहिए। इसलिए उसने 2 के नीचे शून्य लगा दी।

? शिक्षक के छोटे तरीके ने बच्ची को इस क्रिया को बेहतर ढंग से करने में मदद क्यों नहीं दी?

यदि आपने सही अनुमान लगाया है, तो समस्या यह है कि बच्ची को संख्याएं लिखने के लिए ज़रूरी समझ निर्मित करने में मदद नहीं दी गई। उसे इस बात का कोई अन्दाज़ नहीं है कि क्यों शून्य लगाई जा सकती है या लगाई जानी चाहिए और किस तरह लगाई जानी चाहिए। उसे यह नही बताया गया कि दसवें भाग, सौवें भाग आदि को देखना होता है। अतः वह यह नहीं समझ पाई कि हर चरण में बराबर मान के भाग जोड़े जाते हैं। स्पष्ट है कि उसे इस बात का कारण समझ में नहीं आया है कि क्यों 'दशमलव भिन्न के दाईं ओर शून्य लगाने से संख्याओं का मान नहीं बदलता जबकि बाईं ओर शून्य लगाने पर मान बदल जाता है' और वह जोड़ी जा रही संख्याओं को बदल नहीं सकती।

उपरोक्त चर्चा से स्पष्ट है कि शिक्षकों द्वारा बतायी जाने वाली विधियां और छोटे तरीके कभी–कभी बच्चों के लिए भ्रम का कारण बन जाते हैं।

मेरा एक और दिलचस्प अनुभव सुनिए।

एक बार मैंने एक 10 वर्षीय बच्चे से 0.4 और 0.8 को जोड़ने को कहा। उसका जवाब 0.12 था। इसके बाद मैंने '0.4 और 0.8 को जोड़ने' का वही प्रश्न थोड़ा अलग ढंग से पूछा। मैंने उससे पूछा, 'मान लो कि दो अल्मारियां पास–पास रखी हैं और उनकी लम्बाइयां 0.4 मीटर और 0.8 मीटर हैं। अल्मारियों की लम्बाई बताओ।' लगता है कि वह जानता था कि 0.4 मीटर का मतलब 40 से.मी. और 0.8 मीटर का मतलब 80 से.मी. होता है। उसने इन्हें जोड़कर पता लगाया कि यह 120 से.मी. यानी 1.2 मीटर हैं। जब मैंने उससे पूछा कि 'तुमने 1 मीटर और 20 से.मी. को 1.2 मीटर क्यों लिखा', तो उसने बताया कि 1 मीटर और 20 से.मी. लिखने की बजाय 1.2 मीटर लिखना ज़्यादा आसान है। अर्थात् इस संदर्भ में उसे पता था कि बिन्दु मीटर और से.मी. को पृथक करता है।

? तो, ऐसा क्यों है कि दूसरे मामले में बच्चा प्रश्न सही हल कर लेता है जबकि पहल मामले में नहीं कर पाया था?

यह इसलिए हो सकता है कि दूसरे मामले में बच्चे ने इस प्रक्रिया में निहित सिद्धांत को समझ लिया था। स्थिति उसके लिए परिचित थी।

आइए अब देखते हैं कि किसी मानक पाठ्यपुस्तक में घटाना की क्या सूत्रविधि दी जाती है।

दो दशमलव संख्याओं का अन्तर पता करने के लिए

1) दोनों दशमलव संख्याओं को इस तरह लिखित कि बड़ी संख्या ऊपर हो और संख्याएं इस तरह स्तम्भों में लिखी जाएं कि दोनों के दशमलव बिन्दु एक ही स्तम्भ में हों और एक ही स्थानीय मान वाले अंक एक ही स्तम्भ में हों;
2) दशमलव बिन्दु को अनदेखा करते हुए संख्याओं को ठीक उसी तरह घटाइए जैसे पूर्णांक संख्याओं को घटाते हैं;
3) परिणाम में दशमलव बिन्दु को दोनों संख्याओं के दशमलव बिन्दु के ठीक नीचे रख दीजिए।

क्या आप इस सूत्रविधि का अनुसरण करते हैं ? क्या आपके आसपास के सब लोग इसका पालन करते हैं? यदि नहीं, तो अन्तर कहां होता है ? जैसे– आपमें से कितने लोग उपरोक्त सूत्रविधि के चरण 2 और चरण 3 का पालन करते हैं ? आम तौर पर हम सभी दशमलव बिन्दु को मन में रखते हैं और जैसे ही दसवें भाग से आगे बढ़ते हैं, दशमलव बिन्दु लगा देते हैं और फिर इकाइयां घटाने लगते हैं।

? सूत्रविधि के बारे में उपरोक्त टिप्पणी क्यों महत्वपूर्ण है?

आम तौर पर कक्षा में शिक्षक शब्दशः पाठ्यपुस्तक का अनुसरण नहीं करते। वे बोर्ड पर एक उदाहरण लेकर बच्चों को किसी सूत्रविधि का उपयोग बता देते हैं। बाद में जब बच्ची कोई प्रश्न करती है और उसे किसी स्पष्टीकरण की ज़रूरत होती है तो वह किताब देख सकती है। यदि किताब में दिया गया नियम, शिक्षक के बताए नियम से अलग है तब बच्ची भ्रमित हो जाएगी। हां, यदि उस नियम में निहित प्रक्रिया उसे स्पष्ट है तो शायद वह भ्रमित न हो।

कई बार शिक्षक बच्चों को कुछ छोटे तरीके बताते हैं, जो उनके अनुसार सूत्रविधि को लागू करने में मददगार हैं।

सूत्रविधि के बारे में हमने एक और बात यह देखी है कि शिक्षक आम तौर पर पाठ्यपुस्तक का शब्दशः अनुसरण नहीं करते। जैसे, किसी मानक पाठ्यपुस्तक में दी गई बाकी की सूत्रविधि देखते हैं। आपमें से कितने व्यक्ति आगे दी गई विधि के चरण 2 व चरण 3 का अनुसरण करते हैं। हममें से अधिकांश लोग दशमलव बिन्दु को अपने मन में रखते हैं और जब दसवें भाग से इकाई पर जाते हैं तो दशमलव बिन्दु लगा कर इकाई को घटाने लगते हैं। अर्थात् किताब में दिया गया नियम और शिक्षक ने जो किया, उनमें अन्तर है। इस स्थिति में हमें यह पता होना चाहिए कि बच्ची के पास किताब उपलब्ध है। अब यदि प्रश्न हल करते समय बच्ची को आपके द्वारा बताई गई विधि में कोई स्पष्टीकरण चाहिए तो वह अपनी किताब देख सकती है। चूंकि आपके द्वारा बताई गई विधि और किताब में दिए गए नियम के बीच अन्तर है, बच्ची के दिमाग़ में भ्रम उत्पन्न हो सकता है। यह भ्रम आसानी से सुलझ सकता है, बशर्ते कि इस बात की अवधारणात्मक समझ हो कि आपके द्वारा बताई गई विधि में क्या हो रहा है और वह कैसे काम करती है।

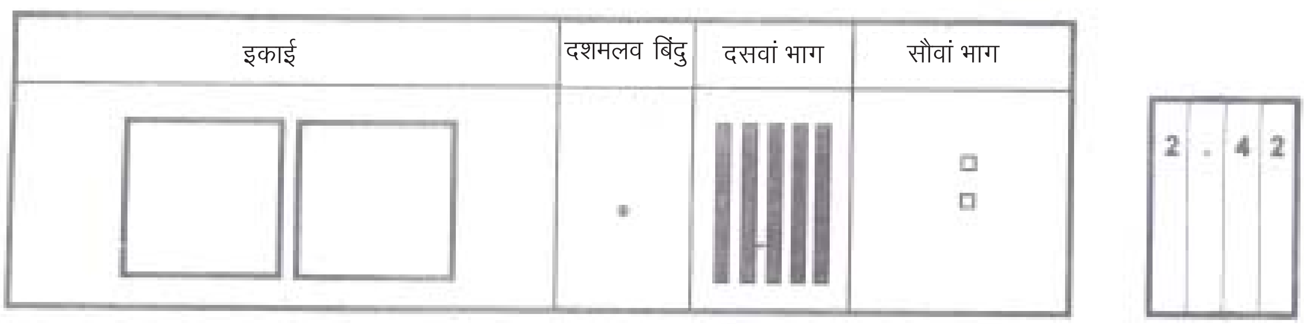
यदि आप जोड़ और घटाना के विधियां देखें, तो पाएंगे कि अंकों का मिलान करना यानी सही स्थान पर रखना सबसे महत्वपूर्ण चरण है। अर्थात् दसवें भाग के अंकों को एक स्तम्भ में, सौवें भाग के अंकों को एक स्तम्भ में और इसी प्रकार से विभिन्न मान के अंकों को लिखना। इसके बाद समान स्थान वाले अंकों को घटाना और घटाते हुए 'उधार' का नियम याद रखना। यदि बच्ची इनमें से किसी भी चरण में ग़लती करती है तो ग़लत उत्तर आएगा।

आप बच्ची को यह सूत्रविधि समझने में मदद कैसे करेंगे ? सबसे अच्छा तो यही होता है कि बच्ची स्वयं सूत्रविधि विकसित करे। सूत्रविधि उसे आत्मसात् करना होगा, आप सूत्रविधि उसे दे नहीं सकते।

अब हम घटाना सिखाने की कुछ शिक्षण रणनीतियों पर विचार करेंगे।

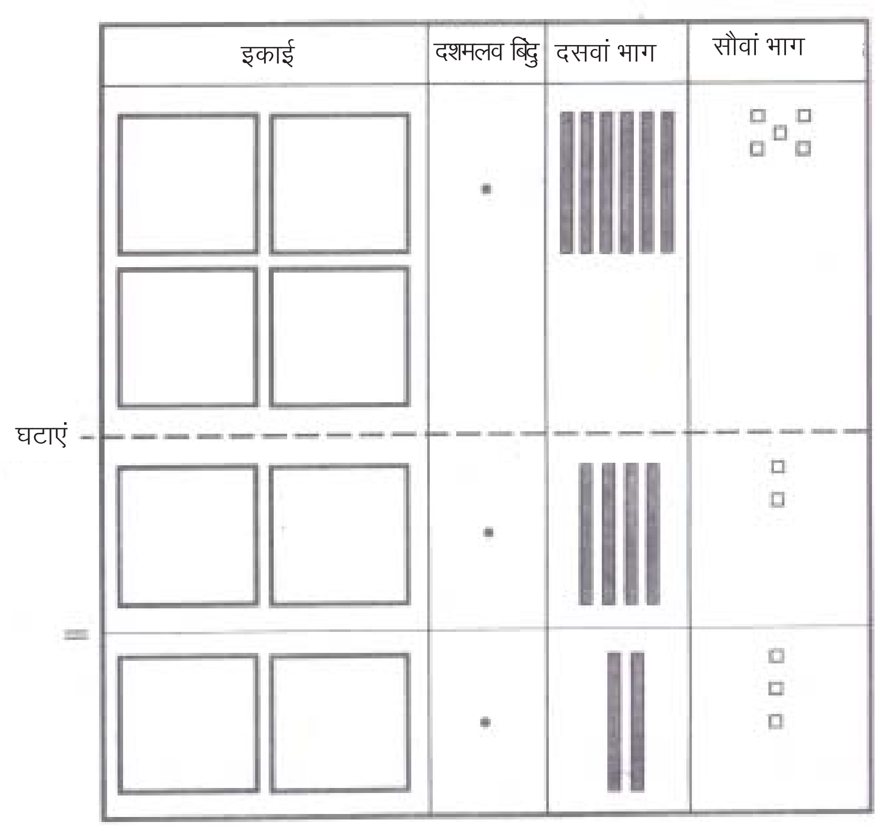
आइए देखते हैं कि उदाहरण 1 की कक्षा 5 की शिक्षक अपने बच्चों को घटाना की सूत्रविधि विकसित करने में कैसे मदद देती है।

उदाहरण 2 : इस कक्षा में शिक्षक ने बच्चों को 100 भागों में बंटे वर्ग से दशमलव संख्याएं लिखने से परिचित करा दिया था। छात्रों को इतना अभ्यास हो चुका था कि वे एक वर्ग (देखें चित्र 6) और उससे सम्बंधित स्थानीय मान तालिका के साथ काम कर लेते थे।



चित्र 6: (क) 2.42 दर्शाती तालिका (ख) सम्बंधित स्थानीय मान तालिका

इस कक्षा में शिक्षक घटाना की सूत्रविधि करवाना चाहती थी। शुरुआत उसने 4.6-2.42 से की और जान बूझ कर इसे आड़े रूप में लिखा। उसने चित्र 7 में दिखाई तालिका बनाई।



चित्र 7: 4.65–2.42 = 2.23

अब उसने बच्चों से कहा कि वे सबसे दाएं स्तम्भ में शुरू करें और स्तम्भवार घटाते जाएं। उनमें बातचीत कुछ इस प्रकार हुई:

शिक्षक : सौवें भाग के स्तम्भ से शुरू करते हैं। इसमें 5 टुकड़े पहली संख्या के हैं और 2 टुकड़े दूसरी संख्या के। तो अन्तर आया 5-2 = 3 टुकड़े। (शिक्षक ने एक और तालिका बनाई) इसी प्रकार से शेष स्तम्भों के साथ भी करते जाओ।

कुछ बच्चे : दसवें भाग के स्तम्भ में हमारे पास 2 पट्टियां रहेंगी।

(शिक्षक ने दसवें भाग के स्तम्भ में 2 पट्टियां बना दी।)

शिक्षक : इसके बाद आएगा दशमलव बिन्दु और उसके बाद?

बच्चे : 2 वर्ग। (शिक्षक ने दो वर्ग बना दिए)

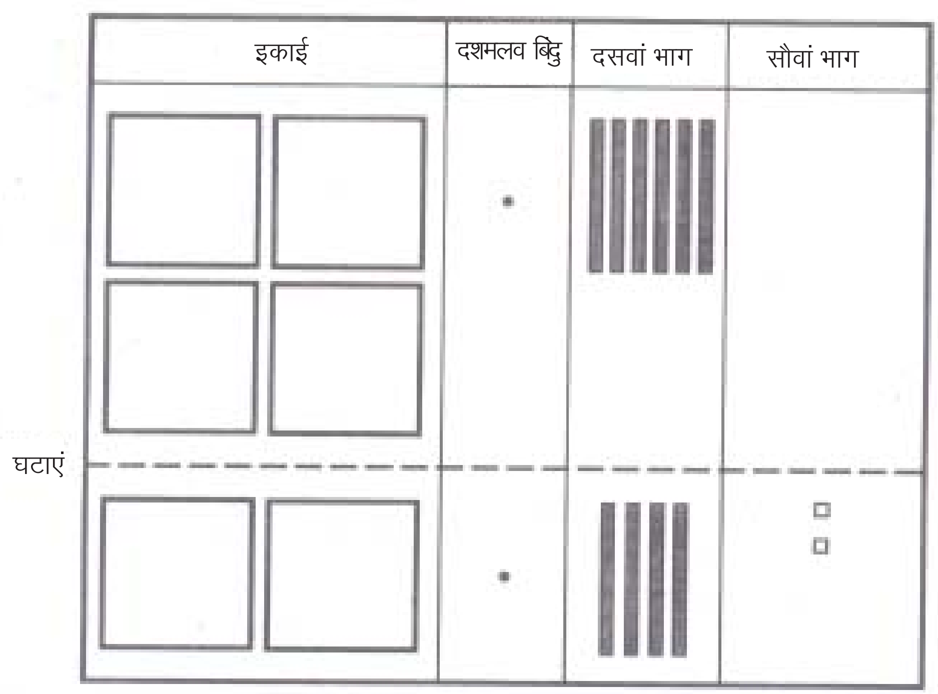
शिक्षक : तो उत्तर क्या हुआ?

बच्चे : 2.23 (शिक्षक ने उत्तर को भी सबसे बाएं स्तम्भ में लिख दिया)

शिक्षक : ठीक है। बहुत बढ़िया। अब मान लो कि 4.65 की बजाय मैं 4.6 लेती हूं और इस में से 2.42 घटाती हूं। इसे कैसे करेंगे? (उसने सब बच्चों से 4.6 - 2.42 से सम्बंधित तालिका बनाने को कहा।) उसने विशेष ध्यान दिया कि सब बच्चे यह कर लें। उसने खुद भी एक तालिका बनाई (देखें चित्र 8)।

अब तुम स्तम्भवार घटाओ। सौवें भाग के स्तम्भ से शुरू करो।

छात्रों ने देखा कि पहली संख्या में सौवें भाग पर कोई अंक ही नहीं है। वे थोड़े चक्कर में पड़ गए।



चित्र 8: 4.6—2.42

शिक्षक : क्या कठिनाई है?

एक छात्र : (सौवें भाग के स्तम्भ की ओर इशारा करते हुए) यहां तो कोई अंक ही नहीं है। हम क्या करें?

शिक्षक : जब पूर्णांक संख्याओं को घटाते हो तो ऐसे मामले में क्या करते हो?

कुछ छात्र : हम उधार लेते हैं।

शिक्षक : तो यहां भी वही करो।

यहां उसने कक्षा को समझाया कि इकाई, दसवें भाग और सौवें भाग में आपस में उधार–हासिल कैसे करते हैं। इसके बाद वे प्रश्न पर आईं और निम्नलिखित तालिका बना लीः

इकाई	दसवां भाग	सौवां भाग
	एक कम	

इस तरह करते हुए वे उत्तर 2.18 पर पहुंच गए।

इसके बाद शिक्षक ने उन्हें अलग–अलग अंकों वाली संख्याओं के कई और प्रश्न दिए। जब उसने देखा कि वे स्थानीय मान की तालिका का उपयोग करते हुए यह क्रिया कर सकते हैं, तो उसने उन्हें यही क्रिया संकेत रूप में करने को कहा; इसके लिए उन्हें निम्नानुसार विस्तृत रूप का उपयोग करने को कहा :

9.84	$\rightarrow$	9 इकाई + 8 दसवां भाग + 4 सौवां भाग
– 4.32	$\rightarrow$	4 इकाई + 3 दसवां भाग + 2 सौवां भाग
5.52		5 इकाई + 5 दसवां भाग + 2 सौवां भाग

अन्ततः जब शिक्षक आश्वस्त हो गई कि छात्र लम्बे रूप का सम्बंध छोटे रूप से जोड़ पा रहे हैं तब उसने छोटे रूप में ही प्रश्न करने को कहा।

अपने इस अनुभव से शिक्षक ने समझ लिया कि दशमलव की क्रिया समझने के लिए आवश्यक है कि बच्चों को लम्बे समय तक बार–बार इसका अभ्यास करने का मौका मिले।

ध्यान दें कि उपरोक्त उदाहरण में शिक्षक ने बच्चों को विभिन्न प्रकार की दशमलव भिन्नों की संकेत पद्धति समझाने और जोड़ की क्रिया समझाने, दोनों के लिए एक ही तरह के प्रतीकों व ठोस वस्तुओं का उपयोग किया।

और अब कुछ अभ्यास।

E10) ऊपर हमने जिस गतिविधि का विवरण दिया, क्या उससे बच्चों को घटाने की क्रिया समझने और इसे दशमलव भिन्नों पर लागू करने में मदद मिलेगी ? इस गतिविधि को कक्षा 5 के कम से कम 10 बच्चों के साथ आजमाइए और उनकी समझ का मूल्याकंन कीजिए। जब हमने कुछ शिक्षकों के साथ इस गतिविधि पर चर्चा की, तो कुछ का विचार था कि यह सूत्रविधि से बेहतर साबित नहीं होगी। क्या आप इससे सहमत हैं अपने उत्तर के कारण दीजिए।

E11) आपको क्या लगता है कि उपरोक्त उदाहरण में बच्चों ने दशमलव संख्याओं को घटाने की क्या सूत्रविधि विकसित की होगी ? यह सूत्रविधि विस्तार में लिखिए।

अब तक हमने जोड़ और घटाने की समस्याओं पर विचार किया। अब हम गुणा और भाग की बात करेंगे।

10.5 गुणा और भाग

गुणा और भाग के बारे में प्राथमिक विद्यालय के एक शिक्षक ने एक वक्तव्य दिया था। शुरुआत प्रारम्भ उसी से करते हैं।

'दशमलव भिन्नों के गुणा व भाग की सूत्रविधि आसान है। पूरी प्रक्रिया लगभग पूर्णांक संख्याओं के गुणा–भाग जैसी ही है। एकमात्र समस्या दशमलव को सही जगह लगाने की होती है।'

क्या आप इस कथन से सहमत हैं ? आप इसका विश्लेषण कैसे करेंगे और कक्षा के संदर्भ में इसका क्या प्रभाव होगा ? हमने लगातार इस बात पर ज़ोर दिया है बच्चों को दिए गए ये नियम अन्ततः उन्हें भ्रमित ही करते हैं। जब तक वे किसी नियम का अर्थ व प्रभाव न समझें, वे इसका उपयोग नहीं कर सकते। इसकी और छानबीन करने के लिए आप 10-15 वर्ष के बच्चों को देख सकते हैं। इन सभी बच्चों को दशमलव भिन्नों के गुणा के संदर्भ में कभी न कभी यह नियम अवश्य बताया गया होगा। उनसे ज़रा दशमलव संख्याओं और उनके गुणा के बारे में बात कीजिए। आप उनकी समझ के बारे में क्या निष्कर्ष निकालते हैं ? क्या वे यह जानते हैं कि दशमलव भिन्न से गुणा करने पर गुणनफल वास्तव में मूल संख्या (गुण्य) से कम आ सकता है। उनसे बात करके तथा उनकी समझ के बारे में अपने विचार लिखने के बाद, क्यों न आप निम्नलिखित अभ्यास कर लें ?

E12) अपने आसपास के 10-15 वर्ष उम्र समूह के कम से कम 10 बच्चों को दशमलव भिन्नों के गुणा और भाग के 5 प्रश्न दीजिए। इस आधार पर दशमलव बिन्दु को सही स्थान पर लगाने की उनकी क्षमता की जांच कीजिए।

दुनिया भर में किए गए विभिन्न अध्ययनों से पता चला है कि बच्चे जो गलतियां करते हैं उनका मूल स्रोत दशमलव बिन्दु को सही जगह लगाने को लेकर भ्रम में है। इससे स्वाभाविक रूप से यह सवाल उठता है कि यदि सूत्रविधि 'सरल' है तो बच्चे दशमलव को सही जगह लगाने में गलती क्यों करते हैं? हमें यह भी याद है कि जोड़–बाकी की सूत्रविधि के विपरीत गुणा की सूत्रविधि उतनी लम्बी भी नहीं है। फिर भ्रम क्यों? यह तो पक्की बात है कि विधि बच्चों को रटी होती है। बच्चों की अक्षमता का कारण यह है कि उन्हें इस सूत्रविधि में निहित सिद्धांत का ज्ञान नहीं है।

मान लीजिए कोई बच्ची जानना चाहती है कि दो दशमलव भिन्नों, जैसे 3.8 और 0.46 का गुणा कैसे करें। आम तौर पर हम उसे बताते हैं कि दशमलव बिन्दु को अनदेखा करके साधारण ढंग से गुणा कर लो और फिर दशमलव बिन्दु के बाद अंकों की कुल संख्या गिनकर दशमलव लगा दो। ($36 \times 46 = 1748$; 3.8 में दशमलव के बाद एक अंक है और 0.46 में 2 अंक है। कुल तीन; इसलिए गुणनफल में दशमलव बिन्दु इस तरह लगाओ के दशमलव बिन्दु के बाद तीन अंक रहें – उत्तर 1.748)

यदि इस नियम को सही तरह से लागू किया जाए तो उन्हें सही उत्तर मिलेगा। मान लीजिए कि इस बच्ची को निम्नलिखित ढंग से समझाया जाए। 'दशमलव भिन्नों का निम्नानुसार नए रूप में लिखो'

$$38 \times 0.46 = \frac{38}{10} \times \frac{46}{100} = \frac{1748}{1000} = 1.748$$

इसके बाद उसे बताया जाए कि 'हर में 10 की घात = हर में शून्यों की संख्या'। उससे कहा जा सकता है कि वह इस बात की जांच विभिन्न प्रकार की दशमलव भिन्नों से करके देखें ताकि उसकी समझ स्पष्ट हो जाए। इसके बाद उससे कहा जा सकता है कि जब भिन्न के हरों का गुणा करते हैं तो गुणन के हर में शून्यों की संख्या दोनों भिन्न के हरों में शून्यों की संख्या के योग के बराबर होती है। इससे हमें यह पता चलता है कि दशमलव के बाद अंकों की संख्या हरों में शून्यों की संख्या के योग से मेल खाती है।

क्या आपको लगता है कि इस तरह की व्याख्या से बच्ची को गुणा की सूत्रविधि के विभिन्न चरणों में निहित प्रक्रिया को समझने में मदद मिलेगी ? क्या आपके विचार में यह बेहतर होगा कि पहले दो भिन्नों के गुणा का अर्थ समझाया जाए और उसके बाद सूत्रविधि पर पहुंचा जाए ?

बच्ची की आवश्यकता को कैसे पूरा करें और उसे उन सारी स्थितियों को समझने व निपटने में कैसे मदद करें जो उसके सामने आएंगी ? यह तो हम पहले ही कह चुके हैं कि बच्ची के लिए विभिन्न स्थितियों में और विभिन्न प्रकार की संख्याओं के साथ दशमलव भिन्नों का अर्थ समझना आवश्यक है। आपको दो पूर्णांक संख्याओं और दो दशमलव भिन्नों के गुणा के बीच और भी अन्तर नज़र आ सकते हैं। हम चाहेंगे कि अगले अभ्यास में आप इस पर ध्यान दें।

आइए देखें कि ये अलग–अलग स्थितियां क्या हैं ?

प्रथम स्थिति : किसी दशमलव भिन्न संख्या में पूर्णांक संख्या का गुणा । इसे समझना अपेक्षाकृत आसान है और यह पूर्णांक संख्याओं के गुणा के समान है। जैसे 3×0.6 को '3 बारी 0.6' के रूप में भी देखा जा सकता है।

स्थिति द्वितीय : एक दशमलव भिन्न को दूसरी दशमलव भिन्न से या पूर्णांक संख्या से गुणा करना।

किसी संख्या में दशमलव भिन्न से गुणा करने का अर्थ यह होता है कि पहले उस संख्या में 10 की किसी घात से भाग देना और फिर उसमें किसी पूर्णांक संख्या से गुणा करना। उदाहरण के लिए 0.3×4 पर ध्यान दें।

मान लीजिए हम इस क्रिया को 4 से 0.3 भाग के रूप में देखते हैं। इसका अर्थ यही है कि 4 के 3 दसवें भाग लेना। अर्थात्

$$3 \times \left(\frac{1}{10} \times 4\right)$$

यानी 4 का $\frac{3}{10}$ जो 3 बार 4 के $\frac{1}{10}$ के बराबर है। इसे हम इस तरह भी लिख सकते हैं।

$$0.3 \times 4 = \frac{3}{10} \times 4 = 3 \times \left(\frac{1}{10} \times 4\right) = 3 \times 0.4 = 1.2$$

जब हम किसी पूर्णांक संख्या में किसी दशमलव भिन्न के गुणा की बात करते हैं तो 10 की घातों में दशमलव भिन्न के गुणा पर विशेष ध्यान देना होता है। आप पूछ सकते हैं कि हम इसकी बात अलग से क्यों कर रहे हैं। ऐसा इसलिए कि इस मामले में संख्याओं का व्यवहार ऐसा होता है कि सूत्रविधि गुणा की सूत्रविधि से भी अधिक सरल हो जाती है। इस सूत्रविधि को निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है :

'किसी दशमलव संख्या में 10 की घात यानी 10^n, $n = 1, 2, 3$ से गुणा करने के लिए दशमलव बिन्दु को एक स्थान दाई ओर खिसका देना होता है।' इस सूत्रविधि को सही तरह से लागू करने के लिए '10 की घात से गुणा' का अर्थ समझना आवश्यक है।

यह दशमलव संख्याओं की एक महत्वपूर्ण क्रिया है जो बच्चों को सीखना चाहिए।

जैसे 0.3×10 पर ध्यान दीजिए। 0.3 में तीन दसवें भाग हैं और हम प्रत्येक दसवें भाग में 10 का गुणा करते हैं। आप जानते ही हैं कि 10 दसवें भाग मिलकर एक इकाई बनती है। इसलिए इस मामले में हमें 3 इकाइयां मिलती हैं।

इस तथ्य पर बार–बार ज़ोर दिया जाना चाहिए कि दशमलव भिन्न में 10 की घात का गुणा या भाग करने पर वह संख्या अपरिवर्तित रहती है।

आपने देखा होगा कि एक दशमलव भिन्न से गुणा करने में एक महत्वपूर्ण चरण किसी संख्या का दसवां भाग या सौवां भाग लेने का होता है। बच्चों को इसे समझने में समय लग सकता है। ये क्रियाएं इकाई भिन्नों से गुणा की क्रिया की ही उदाहरण हैं, जिनका उदाहरण पिछली इकाइयों में दिया गया था। इकाई भिन्न से गुणा करने का अर्थ यही है कि उस भिन्न के हर के पूर्णांक से भाग दिया जा रहा है अर्थात् $\frac{1}{10}$ से गुणा का अर्थ है 10 से भाग देना।

अब आप उपरोक्त चर्चा पर आधारित ये अभ्यास कीजिए।

E13) ऊपर वर्णित गुणा की विभिन्न स्थितियों को दर्शाने के लिए आप सौ भागों में बंटे वर्ग का उपयोग कैसे करेंगे ?

E14) दो पूर्णांक संख्याओं के गुणा के बारे में तो यह बात सही है कि 'गुणा से सुख्या बड़ी हो जाती है'। क्या यह कथन दशमलव भिन्नों के लिए भी सही है ? कारण सहित उत्तर दीजिए।

E14 करते हुए आपने ध्यान दिया होगा कि जब हम किसी पूर्णांक संख्या में 1 से छोटी दशमलव भिन्न से गुणा करते हैं, तो गुणनफल पूर्णांक संख्या से छोटा होता है। उदाहरण के लिए,

$$0.2 \times 4 = \frac{2}{10} \times 4 = \frac{8}{10} = 0.8, \text{ और } 4 > 0.8$$

अर्थात् यह बात सभी संख्याओं के मामले में सही नहीं है कि गुणा से हमेशा बड़ी संख्या प्राप्त होती है।

E15) क्या दशमलव भिन्नों के परस्पर तथा दशमलव भिन्न और पूर्णांक के गुणा तथा पूर्णांक संख्याओं के गुणा के बीच और भी कोई महत्वपूर्ण अन्तर हैं? ये अन्तर क्या हैं? क्या इनके बीच कोई समानताएं भी हैं ? समानताएं क्या हैं ?

अब हम दशमलव भिन्नों के भाग की बात करेंगे।

भाग

प्रारम्भ करते हैं पाठ्यपुस्तकों में प्रस्तुत भाग की सूत्रविधि से।

एक दशमलव संख्या को पूर्णांक संख्या से भाग देने के लिए हमें निम्नलिखित क्रियाएं करते हैं :

1) हम भाग की क्रिया ठीक उसी तरह करते हैं जैसे पूर्णांक संख्याओं का भाग करते हैं (दशमलव को अनदेखा करके)

2) पहले हम भाज्य के पूर्णांक वाले भाग में भाग करते हैं। फिर हम भागफल में इकाई के स्थान के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगा देते हैं और उसके बाद भाज्य संख्या के दशमलव वाले भाग में भाग देना ज़ारी रखते हैं।

3) यदि भाज्य संख्या का पूर्णांक वाला भाग शून्य है तो भागफल के इकाई वाले स्थान पर शून्य लिख देते हैं। फिर इकाई के स्थान वाली इस शून्य के दाईं और दशमलव बिन्दु लगाते हैं। और इसके बाद भाज्य के प्रत्येक अंक के लिए तब तक एक–एक शून्य लगाते जाते हैं जब तक कि ये अंक मिलकर भाजक से बड़ी संख्या न बन जाएं।

4) यदि भाज्य का पूर्णांक वाला भाग भाजक से कम है तो हम भागफल में इकाई के स्थान पर शून्य लिखते हैं। इसके बाद हम भागफल में इकाई के स्थान के दाई ओर दशमलव बिन्दु लगा देते हैं। अब यदि भाज्य के पूर्णांक का अंक और दशमलव के बाद वाला पहला अंक मिलकर बनी संख्या भाजक से छोटी हो तो भागफल में दशमलव के दाई ओर शून्य लगाते हैं। यदि भाज्य के पूर्णांक के अंक और दशमलव के बाद दो अंक मिलकर बनी संख्या भी भाजक से छोटी हो तो हम एक की बजाय दो शून्य लगाते हैं, आदि।

5) यदि अन्तिम शेष शून्य न हो, तो हम भाज्य के दाई ओर इतनी शून्य लगाते हैं कि अन्तिम शेष शून्य हो जाए।

क्या आप उम्मीद करते हैं कि कोई वयस्क इस तरह व्यक्त सूत्रविधि को समझ पाएगा/गी? तो फिर हम बच्चों पर इस तरह की कठिन भाषा का बोझ क्यों डालना चाहते हैं ? शायद अपेक्षा यह है कि हम शिक्षक इसे पढ़ेगें और शायद समझ भी जाएंगे। किन्तु इससे हमारा काम और कठिन हो जाता है। काम यह है कि बच्चों को सूत्रविधि को स्वयं के लिए प्रतिपादित करने और समझने में मदद कैसे करें।

अपने दिमाग़ में इसका मंथन करते हुए हमें खुद से यह भी पूछना होगा कि हम इस बात के प्रति कितने सचेत हैं कि बच्चों को इसके साथ सहज होने में मदद की आवश्यक है। हम बच्चों को कितने व कैसे अवसर देते हैं कि वे इस सूत्रविधि का अभ्यास कर सकें और इसे अपने ढंग से व्यक्त कर सकें और इसकी तुलना किताब में दिए गए सूत्रविधि से कर सकें ? वास्तव में सोचने की बात यह है कि हममें से कितने लोग इसे निरूपित कर सकेंगे और/या यह समझा सकेंगे कि क्यों एक विशेष तरह की विधि ही दी गई हैं। क्या हम यह नहीं करते कि भाग देने की जो विधि हमें याद है उस पर अमल करने लगें ? और हममें से कितने लोग विधि में निहित तर्क की परवाह करते हैं या समझते हैं ?

मुद्दा यह है कि सूत्रविधि में निहित सिद्धांत और तर्क को अनदेखा करके केवल कुछ नियम और हल किए गए उदाहरण बताकर हम बच्ची को क्या संदेश दे रहे हैं? जैसे किसी 10 वर्षीय बच्चे अपूर्व का 5 ÷ 3 करने का तरीका नीचे दिया गया है। अब शेष बचे का 2 का

उसके लिए क्या अर्थ बनता है ? बच्चे ने तो ठीक वही किया जो उसके शिक्षक ने बताया था, 'तीन दशमलव स्थान के बाद रुक जाओ और 2 के सामने शेष लिख दो'। हमें यह पता लगाना होगा कि बच्चे ने क्या समझा कि उसने क्या किया और प्राप्त उत्तर का

उसके लिए क्या अर्थ है। इस मामले में बच्चा शायद सोचे कि $5 \div 3 = 1.666$ और शेष 2 होता है। E14 करते हुए आपने भी शायद यह स्थिति देखी होगी।

```
    1.666
3)  5
   -3
    20
   -18
     20
    -18
      20
     -18
       2 – R
```

आइए प्रयास करें कि यहां प्रस्तुत भाग की सूत्रविधि को खोलकर देखें। इसके लिए हम किताब में दी गई सूत्रविधि का उपयोग करते हुए $0.2 \div 3$ की गणना करेंगे।

चरण 3 का पालन करते हुए मैंने भागफल में इकाई के स्थान पर शून्य लिखकर उसके बाद दशमलव लगा दिया। अब मुझसे कहा गया है कि भाज्य के प्रत्येक अंक के लिए दशमलव बिन्दु के दाईं ओर एक–एक शून्य लगाऊं। यहां ऐसा एक ही अंक है। सो, मैंने एक शून्य लगा दी। अब मुझे पता नहीं कि आगे कैसे बढ़ूं क्योंकि चरण 3 के अनुसार मुझे तब तक प्रत्येक अंक के लिए शून्य लगाते जाना है जब तक कि उन अंकों से मिलकर बनी संख्या भाजक से बड़ी न हो जाए। मुझे नहीं पता कि यह 'उन' किन अंकों से सम्बंधित है। तो मैं अटक गई।

क्या आपको नहीं लगता कि ऐसे प्रश्न करते समय बच्चे को भी यह समस्या आती होगी ?

E16) ऐसी दो और कठिनाइयां पता लगाएं जो उक्त सूत्रविधि का उपयोग करते समय बच्ची के सामने आती होगी।

उपरोक्त मामले में पाठ्यपुस्तक की छात्र से अपेक्षा शायद यह है कि वह (भाज्य में) 2 के बाद तब तक शून्य लगाए जब तक कि 2 से शुरू होने वाली और 3 से बड़ी संख्या न प्राप्त हो जाए। यदि में इस बात को मानकर चलूं तो मुझे 20 मिलता है। और भागफल में 0.0 मिलता है। (हाशिए में प्रस्तुत गणना देखें)।

```
   0.0
3) 0.2
```

इसके बाद चरण 5 के मुताबिक मुझे तब तक भाज्य के आगे शून्य लगाते जाना है, जब तक कि शेष शून्य न रह जाए। यदि मैं निम्नानुसार शून्य लगाऊं

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.066 \\
3 & 0.20 \\
 & 0.18 \\
\hline
 & 20 \\
 & 18 \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

तो पूर्णांक संख्या के भाग के अपने अनुभव से मुझे अन्तिम शेष संख्या के बाद शून्य लगाना चाहिए; ऐसा करने 20 आएगा। यदि मैं 20 को 3 से भाग दूं तो एक बार फिर 2 आ जाएगा।

भागफल अन्तहीन ढंग से आगे बढ़ता है। तो हम कहां रुकें ? इस बारे में सूत्रविधि क्या कहती है ? क्या आप कोई रास्ता, कोई और सूत्रविधि आदि विकसित कर सकते हैं ?

$0.2 \div 3$ के मामले में जो बात हमने देखी कि दशमलव के बाद कोई अंक (यहां 6) बारम्बार दोहराता है यह कोई अपवाद नहीं है। दरअसल यदि आप $\frac{1.3}{3}$ या $\frac{29.6}{99}$ को हल करें तो देखेंगे कि दशमलव बिन्दु के बाद भागफल में एक अन्तहीन संख्या मिलेगी। इन संख्याओं को लिखकर देखते हैं :

$\frac{0.2}{3}$ = 0.06666............(इसका अर्थ है 6 की पुनरावृत्ति)

$\frac{1.3}{3}$ = 0.4333............(यहां 3 की पुनरावृत्ति हो रही है)

$\frac{29.6}{99}$ = 0.29898............(यहां 98 की पुनरावृत्ति हो रही है)

इन सारे उदाहरणों में दशमलव भिन्नों में दशमलव बिन्दु के बाद अनन्त अंक हैं, मगर दशमलव के बाद कुछ निश्चित अंक बार–बार दोहराए जाते हैं।

वास्तव में ऐसी संख्याओं को दर्शाने के लिए हम दोहराए जा रहे अंकों को ऊपर एक '–' बना देते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$$\frac{0.2}{3} = 0.0\overline{6}$$

$$\frac{1.3}{3} = 0.4\overline{3}$$

$$\frac{29.6}{99} = 0.2\overline{98}\ldots$$

तो भाग की सूत्रविधि पर विचार करके हमने क्या देखा? सबसे पहली बात तो यह है कि प्रक्रिया के बताए गए चरण पूर्णतया अधूरे और जटिल हैं। इन्हें तब तक लागू नहीं किया जा सकता जब तक कि संख्याओं और चरणों की समझ न हो। सूत्रविधि के चरणों में कई उप–प्रक्रियाओं को मानकर चला गया है। बच्चे से अपेक्षा है कि उसे ये पहले से पता हो

या अब खोज निकाले। कई बार तो हम शिक्षक भी इन उप–प्रक्रियाओं को और विभिन्न स्थितियों में इसके अलग–अलग रूपों को नहीं पकड़ पाते।

इन उप–प्रक्रियाओं को समझने के लिए विभिन्न संदभों में भाग का अर्थ समझना ज़रूरी है। जैसे आपने देखा होगा कि दशमलव भिन्नों के भाग में कई अलग–अलग स्थितियां होती हैं। इनमें से कुछ स्थितियां निम्नानुसार हैं :

1) एक दशमलव भिन्न में पूर्णांक संख्या का भाग
2) एक पूर्णांक संख्या में दशमलव भिन्न का भाग
3) एक दशमलव भिन्न में दूसरी दशमलव भिन्न का भाग
4) एक छोटी पूर्णांक संख्या का भाग बड़ी पूर्णांक संख्या में।

उपरोक्त मामलों में भाग की प्रक्रिया को सम्प्रेषित करने की प्रक्रिया पर ज़रा विचार कीजिए।

क्या आप देख पाए कि इन अलग–अलग स्थितियों के लिए अलग–अलग नियम बताए जाते हैं किन्तु यह नहीं बताया जाता है कि इन सबमें भाग की ही प्रक्रिया हो रही है। ध्यान दें कि लंबी (long) भाग प्रत्यक्ष रूप से केवल पहले ही मामले में किया जाता है।

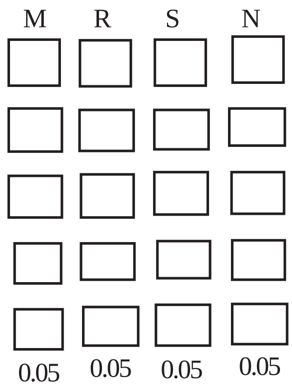
ये स्थितियां इतनी अलग–अलग क्यों नज़र आती हैं। एक ऐसी सामान्य/व्यापक सूत्रविधि क्यों नहीं हो सकती जो सभी स्थितियों में लागू हो सके। यदि हम उपरोक्त तीन स्थितियों में भाग के अर्थ का विश्लेषण करें, तो पाएंगे कि यह अवधारणा के स्तर पर काफी जटिल है। ज़रूरत इस बात की है कि हम इन स्थितियों में भाग का अर्थ समझने में बच्चों की मदद करें। इसके पहले कि हम यह समझ पाएं कि बच्चों की मदद के लिए क्या करना होगा, हम इन चार स्थितियों के उदाहरण देख लें।

स्थिति 1 : एक दशमलव भिन्न में पूर्णांक संख्या का भाग

$0.2 \div 4$ का उदाहरण लेते हैं। ध्यान दें कि 0.2 का अर्थ दो दसवें भाग हैं। यहां भी हम दो दसवें भागों को चार बराबर भागें में बांटेंगे। इसके लिए एक काल्पनिक स्थिति पर विचार करते हैं। मान लीजिए दो चॉकलेट बार हैं जो 10-10 भागों में बंटे हैं। मान लीजिए कोई महिला इन्हें चार बच्चों मीरा, राजू, सीता और रानी के बीच बराबर–बराबर बांटना चाहती है।

चित्र 9

सबसे पहले महिला ने चारों बच्चों को एक बार (दस भागें में बंटा हुआ है) में से एक–एक छोटा भाग दिया। फिर उसने उसी बार में से एक बार फिर यही किया। अब इस बार में दो छोटे भाग बचे। इन्हें और दूसरे बार में से 2 टुकड़े लेकर महिला ने फिर एक–एक भाग बांट दिया। इसी प्रकार से उसने दूसरे बार के टुकड़े भी उनमें बांट दिए। अब उसने बच्चों से अपने–अपने टुकड़े गिनने को कहा। प्रत्येक के पास पांच टुकड़े थे।



चित्र 10

यदि आप इसकी तुलना वर्गाकार ग्रिड (square grid) से करें, तो पाएंगे कि प्रत्येक बार वर्ग का दसवां भाग है और बार का प्रत्येक छोटा टुकड़ा वर्ग का सौवां भाग है। अर्थात् दशमलव की भाषा में प्रत्येक बार 0.1 है और छोटा टुकड़ा 0.01 है। तब 5 टुकड़ों का मतलब होगा 0.5 (देखें चित्र 10)। यानी प्रत्येक बच्चे को 0.5 मिला। इसलिए जब हम 2 दसवें भागों के 4 बराबर भाग करेंगे तो प्रत्येक भाग 0.05 होगा। अतः हम लिखेंगेः

$$0.2 \div 4 = \frac{0.2}{4} = 5 \text{ सौवें भाग } = 0.05$$

स्थिति 2 : एक पूर्णांक संख्या में दशमलव भिन्न का भाग

$4 \div 0.2$ पर विचार करें।

दशमलव से भाग को भाग के दूसरे अर्थ में समझना बेहतर होता है। अर्थात् $4 \div 0.2$ पता करने के लिए हम यह पूछ सकते हैं कि 4 में 'कितने 0.2' या 'कितना 0.2' है? 0.2 यानी 2 दसवें भाग। अतः हमें यह पता करना है कि 4 में कितने 2 दसवें भाग हैं।

इस स्थिति में हम बच्ची से 2 दसवें भाग के बराबर टुकड़े काटने को कह सकते हैं। वह कितनी बार ऐसे टुकड़े काट सकती है? जवाब है 20 बार। यही काम रंग भरकर भी किया जा सकता है। रंग भरी इकाइयों (2 दसवें भाग) को सावधानीपूर्वक गिनकर पता चल जाता है कि 4 में 20 ऐसे 2 दसवें भाग हैं। अतः हम लिखते हैंः

$$4 \div 0.2 = \frac{4}{0.2} = 20$$

स्थिति 3 : एक दशमलव भिन्न को दूसरी दशमलव भिन्न से भाग

$0.4 \div 0.2$ पर विचार करें। केवल दशमलव के रूप में यह समझना काफी बोझिल काम है कि 0.2 में कितने 0.4 होंगे। इसे हम नीचे बताए ढंग से समझने की कोशिश कर सकते हैं। पहले हम पता करते हैं कि 0.4 का दसवां भाग कितना होगा। 0.4 का दसवां भाग 0.04 या चार सौवें भाग है। यह वह इकाई है जिसके आधार पर हम 0.2 को नापेंगे। 0.2 में 20 सौवें भाग हैं। यानी 0.2 में 5 चार–सौवें भाग हैं या 5 (पांच), 0.04 हैं। अर्थात् इसमें 0.4 के पांच–दसवें भाग हैं। बच्ची के लिए यह समझना बहुत कठिन होगा।

अब आप एक अभ्यास क्यों न करें?

E17) एक तरीका सुझाइए जिससे बच्चों को निम्नलिखित समझाया जा सकेः

"किसी दशमलव संख्या में 10, 100, 1000 आदि का भाग देते समय हम भाज्य का दशमलव बिन्दु उतने स्थान बाईं ओर खिसका देते हैं जितनी शून्य भाजक में हों"

अब तक हमने दशमलव की क्रियाओं की चर्चा की। हमने पिछली इकाई में भी कहा था कि संख्याओं को समझने और महसूस करने का एक महत्वपूर्ण भाग अनुमान का है। इससे यह जांचने में तो मदद मिलती ही है कि किसी क्रिया से प्राप्त परिणाम उचित है या नहीं, वरन् कई स्थितियों, जहां गणन करना सरल नहीं होता, में अनुमान लगाने में भी मदद मिलती है। इस पूरे पाठ्यक्रम में हमने लगातार इस बात पर ज़ोर दिया है कि बच्चों को अनुमान की क्षमता के विकास में मदद दी जानी चाहिए।

10.6 दशमलव भिन्नों का अनुमान

आइए कुछ ऐसी स्थितियां जो बच्चों को दशमलव का अनुमान लगाने के लिए दी जा सकती हैं।

1) एक बच्ची नोटबुक खरीदने दुकान पर गई। उसने देखा कि दुकानदार के पास एक 50 पेज की नोटबुक है जिसकी कीमत 3.50 रुपऐ है और एक 70 पेज की नोट बुक है जिसकी कीमत 4.75 रुपए है। दुकानदार ने पूछा, 'तुम्हें कौन–सी नोटबुक चाहिए?"

2) एक बच्ची को 100 रुपए का नोट देकर राशन की दुकान से शक्कर, दाल, आटा और चावल लाने को कहा गया। वह बच्ची यह अनुमान कैसे लगाए कि उतने पैसे में सारा सामान आ जाएगा?

यदि बच्चों से यह प्रश्न मौखिक रूप से पूछा जाए और उन्हें विधिवत गणन न करने दी जाए और जल्दी से उत्तर देने को कहा जाए, तो विवश होकर उन्हें अनुमान का सहारा लेना पड़ेगा। शुरू में उन्हें यह कहकर मदद दी जा सकती है कि उत्तर 50 से कम है आदि। धीरे–धीरे वे स्वयं से उचित प्रश्न पूछ कर उत्तर लिखने लगेंगे।

बच्चों में इस कौशल के विकास हेतु और क्या किया जा सकता है?

आइए देखते हैं कि एक शिक्षक इस सम्बंध में क्या करती हैं।

उदाहरण 3 : शिक्षक ने छात्रों को 5 टोलियों में बांट दिया। प्रत्येक टोली को उन्होंने अलग–अलग लम्बाई के तार के टुकड़े दे दिए। शिक्षक को इनकी सही लम्बाइयां पता थीं। प्रत्येक टोली को उन्होंने एक मापन फीता दिया और तार की लम्बाई पता करने को कहा। फीते पर से.मी. के निशान थे और उसके छोटे भाग नहीं किए गए थे। आइए देखें कि टोली 1 के साथ शिक्षक क्या बातचीत कर रही हैं:

शिक्षक : फीते से तार की लम्बाई नापकर बताओ।

टोली : 3 से.मी. और थोड़ी–सी ज़्यादा।

शिक्षक : ठीक, पर कितनी ज़्यादा? क्या यह 1 से.मी. ज़्यादा है या यह $\frac{1}{2}$ से.मी. ज़्यादा है, या यह $\frac{1}{2}$ से.मी. कम है?

एक बच्ची : $\frac{1}{2}$ से कम है।

शिक्षक : तो तार की लम्बाई 3 से.मी. के करीब है या 4 से.मी. के करीब है?

एक बच्ची : 3 से.मी. के करीब है।

शिक्षक : बढ़िया। तो हम कह सकते हैं कि तार की लगभग लम्बाई 3 से.मी. है, यदि दशमलव को छोड़ दें।

इसके बाद उन्होंने यही गतिविधि 6.85 से.मी. लम्बाई के साथ दोहराई। उन्होंने देखा के 6 से.मी. और ऊपर बहुत अधिक है। जब पूछा गया कि यह लम्बाई 6 से.मी. के करीब है या 7 से.मी. के करीब है। तो कुछ बच्चों ने जवाब दिया कि यह 7 से.मी. के करीब है, तब शिक्षक ने उन्हें समझाया कि इस मामले में लम्बाई लगभग 7 है।

इस तरह से शिक्षक ने हर टोली के साथ काम किया और उन्हें यह सीखने में मदद दी कि लम्बाई का निकटतम पूर्णांक तक सन्निकटन कैसे करते हैं? उन्होंने बच्चों को यह भी समझाया कि यह ज़रूरी नहीं है कि सन्निकटन हमेशा एक संख्या और उसकी अगली संख्या के बीच ही किया जाए। हमें एक ऐसी संख्या चुननी होती है जो उस संख्या के करीब हो और गणन के हिसाब से सुविधाजनक हो। उन्होंने निम्नलिखित उदाहरण दिया

$$255 + 98.73$$

और बताया कि 98.73 तो 100 के करीब है और इसलिए जोड़ का एक अनुमान हम मन ही मन लगा सकते हैं कि यह 355 होगी। इसके बाद उन्होंने कई अभ्यास दिए जिनसे बच्चों को अनुमान का कौशल विकसित करने में मदद मिली

———x———

अब इस उदाहरण पर आधारित एक अभ्यास कीजिए।

E18) दशमलव भिन्नों के सन्निकटन की बात बच्चों को समझाने के लिए एक गतिविधि बनाइए।

उपरोक्त उदाहरण से आप समझ ही गए होंगे कि अनुमान का अभ्यास करवाने की गतिविधियों से दशमलव संख्या की अवधारणात्मक समझ स्पष्ट करने में भी मिलती है।

आइए, एक और उदाहरण देखते हैं।

उदाहरण 4 : एक दिन मेरे पड़ोसी की 12 वर्षीय बेटी मीरा ये प्रश्न जंचवाने के लिए लाई:

	2.19
5.43	2.49
1.36	.99
2.09	.79
.79	1.43
.39	3.19
कर + .48	+ कर .43

इन प्रश्नों के उसके उत्तर 85.4 और 7.61 थे। प्रश्नों को देखते ही मैं समझ गई कि उसके उत्तर ग़लत हैं। आइए देखते हैं मैंने अनुमान की रणनीति का उपयोग करके उसे कैसे यकीन दिलाया कि उसके उत्तर ग़लत हैं।

मैं : संख्याओं को ज़्यादा ध्यान से देखों। मौखिक ही जोड़कर पता लगाते हैं कि तुम्हारे उत्तर सही हैं या नहीं।

मीरा : पर आण्टी, ये तो दशमलव संख्याएं हैं, बहुत कठिन हैं।

मैं : कोई बात नहीं। चलो, देखते हैं कि आप इन संख्याओं के साथ क्या कर सकते हैं। मैं प्रत्येक दशमलव संख्या के सामने अगली पूर्णांक संख्या लिख देती हूँ। देखो–

5.43 के लिए 6

1.36 के लिए 2

2.09 के लिए 3

0.79 के लिए 1

0.39 के लिए 1

0.48 के लिए 1

फिर पूर्णांक संख्याओं को जोड़ लेती हूँ। तो 15 आया इसका मतलब यह है कि जोड़ 15 से ज़्यादा तो नहीं हो सकता। अब मान लो हम इन संख्याओं के दशमलव वाले भाग दें, तो जोड़ कितना आएगा?

मीरा : 8 आएगा।

मैं : तो जोड़ इससे कम हो सकता है क्या?

मीरा : नहीं, क्योंकि हम तो इससे ज़्यादा बड़ी संख्याएं जोड़ रहे हैं।

मैं : इसलिए तुम्हारा उत्तर 8 से ज़्यादा और 15 से कम होना चाहिए। अब अपने उत्तर की तुलना इससे करो।

मीरा : ओ, मेरा उत्तर ग़लत है। मुझे फिर से करना पड़ेगा।

मैं : यानी मोटा–मोटा हिसाब करके हम यह पता लगा सकते हैं कि कहीं हमारा उत्तर ग़लत तो नहीं है।

मीरा : चलो, मैं दूसरे उत्तर की जांच करती हूँ। इसमें भी जोड़ 8 और 15 के बीच होना चाहिए। यह भी ग़लत है। (उसने फिर से गणना करके सही कर लिया। वह बहुत खुश थी।)

———x———

हमने ऊपर के उदाहरण में देखा कि जोड़, घटाना, गुणा और भाग सवाल हल करने में मददगार होते हैं।

हमें कोशिश करनी चाहिए कि बच्चे यह भी समझ पाएं कि सन्निकटन का मकसद संख्याओं को सरल बनाना तथा मन ही मन गणन के योग्य बनाना है। हमें चाहिए कि उन्हें काफी अभ्यास करवाएं ताकि सन्निकटन की विधि को लेकर वे लचीले हो जाएं और इसे क्रिया–विशेष के अनुरूप ढाल सकें। इस अनुभव से यह समझ स्पष्ट होगी कि सन्निकटन वाकई सरलीकरण की प्रक्रिया है।

10.7 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित विषयों पर चर्चा की :

- पूर्णांक संख्याओं के गणित के अपने ज्ञान को दशमलव भिन्नों पर लागू करते समय बच्चों को किन समस्याओं का सामना करना होता है।
- दशमलव पद्धति की समझ को बेहतर बनाने के कुछ तरीके।
- बच्चों को दशमलव भिन्नों से सम्बंधित सूत्रविधियां बताने से पहले अवधारणा के विकास का महत्व।
- बच्चों में भिन्नों के साथ अनुमान लगाने की क्षमता का विकास कैसे किया जाए।

10.8 अभ्यासों पर टिप्पणियां

E2) बच्चों के पास पूर्णांक संख्याओं के स्थानीय मान की अच्छी समझ और भिन्नों का अच्छा अभ्यास होना चाहिए। इससे दसवें भाग और सौवें भाग की समझ के विकास में मदद मिल सकती है।

E7) शिक्षक को शायद यह लगा होगा कि दसवां भाग और सौवां भाग एक साथ शुरू करने की बजाय पहले दसवां भाग बताना बेहतर है। ध्यान दें कि पैसे सम्बंधित गतिविधि में सौवां भाग भी आता है। दूसरी बात यह है कि विभिन्न प्रकार की गतिविधियां हों, तो अवधारणा को बेहतर ढंग से समझा जा सकता है।

E11) दो संख्याओं का अन्तर पता करने के लिए बच्ची निम्नलिखित चरणों का उपयोग कर सकती है :

1) संख्याओं को एक के नीचे एक लिखो, बड़ी संख्या ऊपर रहे। लिखते समय यह ध्यान रखो कि दूसरी संख्या में इकाई वाला अंक पहली संख्या के इकाई वाले अंक के नीचे हो। इसी प्रकार अन्य अंक भी लिखो।

2) यदि दशमलव के दाई ओर अंकों की संख्या दोनों संख्याओं में बराबर न हो, तो हम उन्हें बराबर करने के लिए दशमलव के बाद सबसे दाएं अंक के बाद उपयुक्त संख्या में शून्य जोड़ सकते हैं।

3) अब संख्याओं को पूर्णाक संख्याओं की तरह घटाओ। उत्तर में दशमलव बिन्दु को घटाई जा रही संख्याओं के दशमलव बिन्दु के नीचे लगाओ।

E13) हम चरण I पर चर्चा करेंगे। जैसे– 0.3×5 पर विचार करते हैं। 0.3×5 का मतलब है 5 के 0.3 भाग लेना या '5 के तीन दसवें भाग'। सबसे पहले हम 5 का एक दसवां भाग लेते हैं जो पांच दसवें भाग है। इसके बाद 5 के दसवें भाग का तीन गुना बारम्बार जोड़ करके पता लगाया जा सकता है। एक दसवां भाग 0.5 है, दो दसवें भाग $0.5 + 0.5$ है और तीन दसवें भाग $0.5 + 0.5 + 0.5$ अर्थात् 1.5 है।

इसी तरह आप अन्य चरण आजमा सकते हैं।

E14) नहीं, यदि आप किसी पूर्णांक संख्या में 1 से छोटी दशमलव भिन्न का गुणा करेंगे तो गुणनफल उस संख्या से छोटा होगा।

E17) 1) हम भाग उसी तरह करते हैं जैसे पूर्णांक संख्याओं का भाग करते हैं (दशमलव को अनदेखा करके)

2) हम सबसे पहले भाज्य के पूर्णांक वाले भाग में भाग करते हैं। इसके बाद हम भागफल के इकाई वाले अंक के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगा देते हैं और फिर भाज्य के दशमलव भाग को भाग देते हैं।

3) यदि भाज्य का पूर्णांक वाला भाग शून्य है तो हम भागफल में इकाई के स्थान पर शून्य लिखते हैं। फिर हम भागफल की इस शून्य के दाईं ओर दशमलव बिन्दु लगाते हैं और दशमलव बिन्दु के दाई ओर हम भाज्य के प्रत्येक अंक के लिए तब तक एक–एक शून्य लगाते हैं जब तक कि वे अंक मिलकर भाजक से बड़ी संख्या न बन जाएं।

4) यदि भाज्य का पूर्णांक वाला भाग भाजक से छोटा है तो हम भागफल के इकाई वाले स्थान पर शून्य लिखकर शुरुआत करते हैं। फिर भागफल के इकाई स्थान की शून्य के दाई ओर दशमलव बिन्दु लगाते हैं। यदि भाज्य के पूर्णांक वाले भाग के अंक और दशमलव भाग का पहला अंक मिलकर जो संख्या बनाते हैं वह भाजक से छोटी है तो भागफल में दशमलव के बाद एक शून्य लगाते हैं। यदि भाज्य के पूर्णांक वाले भाग और दशमलव के बाद के 2 अंक मिलकर बनी संख्या भी भाजक से छोटी है तो हम एक की बजाय दो शून्य लगाते हैं आदि।

5) यदि अन्तिम शेष शून्य नहीं है तो भाजक के दाईं ओर इतनी शून्य लगाते है कि अन्तिम शेष शून्य हो जाए।